5) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\quad \ker T=\{(x,y,z) \mid x-y+z=0\}$

$T(1,0,0)=(1,2,3)$

Βάση του $\ker T$

$(x,y,z)\in\ker T \Rightarrow (x,y+z,z)\in\ker T$

$x-y+z=0 \Rightarrow y=x+z$

$x(1,1,0)+z(0,1,1)\in\ker T$

$\ker T=\langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle$

$T(1,1,0)=(0,0,0)=T(0,1,1)$ $\qquad (1,0,0)\notin\ker T$

$(1,0,0)=a(1,1,0)+b(0,1,1)$

$\boxed{a=1}$ $\quad 0=a+b \quad b=0 \Rightarrow b=0=a=1$, αδύνατο

$\dim\mathbb{R}^3=3$

Βάση του $\mathbb{R}^3$ $=\langle(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\rangle$

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{R}^3 & (1,1,0) & (0,1,1) & (1,0,0) \\ \downarrow T & \downarrow T & \downarrow T & \downarrow T \\ \mathbb{R}^3 & (0,0,0) & (0,0,0) & (1,2,3) \end{array}$$

Θέλουμε τον τύπο της T

$(x,y,z)=a(1,1,0)+b(0,1,1)+\gamma(1,0,0)$

Βρες a,b,γ συναρτήσει των x,y,z

$x=a+\gamma \quad y=a+b \quad \boxed{z=b}$

$b=z \quad a=y-b=y-z \quad \gamma=x-a=x-y+z$

$(x,y,z)=(y-z)(1,1,0)+z(0,1,1)+(x-y+z)(1,0,0)$

$\downarrow T$ $\quad$ γραμ. $\downarrow T$ $\quad \downarrow T \quad \downarrow T$

$T(x,y,z)=(y-z)T(1,1,0)+zT(0,1,1)+(x-y+z)T(1,0,0)$

$T(x,y,z)=(x-y+z)(1,2,3)$

6) V δχ $f, g\ V \to \mathbb{R}$ γρ. απ.
$T: V \to \mathbb{R}^2$ $\quad T(v) = (f(v), g(v))$
Ν.δ.ο. T γραμμική κ' $\ker T = \ker f \cap \ker g$

Λύση: $T(av+bv) = aT(v) + bT(v)$ θέλουμε

$$\| $$

$$(f(av+bv) + g(av+bv)) \overset{\text{γρ}}{=} (a(f(v)+bf(v)), ag(v)+bg(v))) =$$
$$= a(f(v), g(v)) + b(f(v), g(v)) = aT(v) + bT(v)$$

$\ker T = \{ v \in V$ ώστε $T(v) = (0,0) \}$
$(f(v), g(v)) = (0,0)$

$f(v) = 0$ κ' $g(v) = 0$
$\Downarrow$
$v \in \ker f$ κ' $v \in \ker g \Rightarrow v \in \ker f \cap \ker g \Rightarrow \ker T \subseteq \ker f \cap \ker g$

Έστω $v \in \ker f \cap \ker g \Rightarrow f(v) = 0$ κ' $g(v) = 0 \Leftrightarrow T(v) = (0,0) \Leftrightarrow v \in \ker T$

7) $T: V^k \to W^m$ γραμμ. απεικ.
$Y \le V$ με $Y = \langle u_1 \dots u_s \rangle \Rightarrow S \le k$ $\{ T(Y) = \langle T(u_1) \dots T(u_s) \rangle$
βάση $\qquad\qquad$ πότε είναι βάση;

Έστω $v \in Y \Rightarrow v = a_1 u_1 + \dots + a_s u_s$, διανύσματα
$T(v) = T(a_1 u_1 + \dots + a_s u_s) \overset{\text{γρ}}{=} a_1 T(u_1) + \dots + a_s T(u_s)$
$T(v) \in \langle T(u_1), \dots, T(u_s) \rangle$ $\qquad$ (όχι απαραίτητα)
$T(x) \le \langle T(u_1), \dots, T(u_s) \rangle \le T(Y)$ Το αντίστροφο είναι προφανές

$\{ T(u_1) \dots T(u_s) \}$ βάση $\Leftrightarrow$ γρ. ανεξ.
- Αν δεν είναι $\exists i$ $T(u_i) = b_1 T(u_1) + \dots + b_s T(u_s)$
χωρίς το i κ' τα $b_1, \dots, b_s$ δεν είναι
όλα μηδενικά

$\vec{0} = \beta_1 T(w_1) + \beta_{i-1} T(w_{i-1}) - T(w_i) + \beta_{i+1} T(w_{i+1}) + \dots + \beta_s T(w_s)$

$\operatorname{Ker} T \cap Y \neq \emptyset$. Άτοπο, όταν S δεν είναι γρ. ανεξ.

$\{T(w_1), \dots, T(w_s)\}$ γραμμ. ανεξ. $\Rightarrow \operatorname{Ker} T \cap Y \neq \emptyset$

$\longleftrightarrow$

S' βάση

$V^n = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \xrightarrow{T} W^m = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$

· Ορίζεται μοναδικά ο πίνακας (T,S,S') της T ως προς τις συγκεκριμένες βάσεις

Ο (T,S,S') έχει σαν στήλες τους συντελεστές

$T(v_i) = a_{1i} w_1 + a_{2i} w_2 + \dots + a_{mi} w_m$

διότι η αναπαράσταση ως προς οποιαδήποτε βάση είναι μοναδική.
Επίσης χρησιμοποιούμε τη διάταξη των βάσεων

$V \xrightarrow{1} V \xrightarrow{1} V$

S βάση S' βάση S βάση

$(1,S,S')$ πίνακας αλλαγής βάσης από την S στην S'

$(1,S',S)$ από την S' στην S

Οι πίνακες αυτοί είναι αντίστροφοι $(1,S,S')^{-1} = (1,S',S)$

$T: V^n \to W^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $S = (v_1, \dots, v_n)$, $S' = (w_1, \dots, w_m)$

διατ. βάση διατ. βάση

Η γραμμ. απεικ. f ορίζεται ως εξής:

$f(w_1) = (1,0,\dots,0) = e_1$

$f(w_m) = (0,\dots,1) = e_m$ η f είναι $\cong$

· Ποιά είναι η σχέση της f με τον πίνακα (τ, S, S')

Ο πίνακας (τ, S, S') έχει σαν στήλες τις συντεταγμένες των $\tau(v_i) = a_{1i}w_1 + \dots + a_{mi}w_m$

$$(\tau, S, S') = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$F(\tau(v_i)) = f(a_{1i} + \dots + a_{mi}w_m) = a_{1i}f(w_1) + \dots + a_{mi}f(w_m) =$$
$$= a_{1i}e_1 + \dots + e_{mi}e_m$$

$(F, S', \text{κανονική βάση του } \mathbb{R}^m) = (\tau, S, S')$

$\tau(V) = \langle \tau(v_1), \dots, \tau(v_n) \rangle$

$\dim \tau(V) = \dim$ του χώρου που γεννάται από τα

$f(\tau(V)) = \langle f(\tau(v_1)), \dots, f(\tau(v_n)) \rangle$

· $\dim f(\tau(V)) =$ διάσταση του υποχώρου που γεννάται από τις στήλες του $(f, S', \text{κανονική}) = \dim \tau(V)$

<u>Πόρισμα</u>: Η διάσταση της εικόνας μιας γρ. απεικ. $\tau: V^n \to W^m$ είναι ίση με τη διάσταση του χώρου που σχηματίζουν οι στήλες του πίνακα (τ, S, S'). Με S διατ. βάση του V κ' S' του W

(Π.χ.) $\tau: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ με $\tau(f) = f'$ η παράγωγος
Να βρεθεί ο πίνακας ως προς τις κανονικές βάσεις

$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + \gamma \mid a, b, \gamma \in \mathbb{R}\} = \langle 1, x, x^2 \rangle$
$\mathbb{R}_3[x] = \{a'x^3 + b'x^2 + \gamma'x + \delta' \mid a', b', \gamma', \delta' \in \mathbb{R}\} = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$

$T(\alpha' x^3 + \beta' x^2 + \gamma' x + \delta) = 3\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma'$

$T(x^3) = 3x^2 + 0x + 0\cdot 1$

$T(x^2) = 0x^2 + 2x + 0 + 0\cdot 1$

$T(x) = 0x^2 + 0\cdot x + 1$

$T(1) = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$

Πίνακας της T $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{\dim = 4}{\mathbb{R}_3[x]} \xrightarrow{T} \underset{\dim W = 3}{\mathbb{R}_2[x]} \xrightarrow{f} \underset{\dim}{\mathbb{R}^3}$

$f(x^2) = (1,0,0)$

$f(x) = (0,1,0)$

$f(1) = (0,0,1)$

$f(T(x^3)) = f(3x^2) = 3(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0,(0,0,1)$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $T: V^n \to V^n$ γραμμ. απεικ. κ' S, S' 2 διατ. βάσεις του V.
Τότε $(T,S,S') = P^{-1}(T,S',S)P$. Εάν P είναι ο πίνακας μετάβασης
από τη βάση S στη βάση S' της ταυτοτικής απεικόνισης.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \\ {[S]} \arrow[r, "{(T,S,S)}"] \arrow[d, "{(1,S,S')}\ \text{ταυτ. απ.}"'] & {[S]} \arrow[d, "{(1,S,S')}"] \\ {[S']} \arrow[r, "{(T,S',S')}"'] & {[S']} \end{tikzcd}$$

$$(T,S,S) = \underbrace{(1,S,S')^{-1}}_{P^{-1}}(T,S',S')\underbrace{(1,S,S')}_{P}$$

~~Θεώρ~~

$T = 1 \circ T \circ 1 \xrightarrow{\text{πίνακας}}$

Σύνθεση των απεικονίσεων.

<u>Πόρισμα</u>: Η σύνθεση των απεικονίσεων μετατρέπεται σε γινόμενο πινάκων

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $T: V \to W$ κ' $T': W \to Z$ γρ. απεικ. Θεωρούμε τις διατ. βάσεις S, S', S'' των V, W, Z αντίστοιχα. Τότε ισχύει $(T' \circ T, S, S'') = (T', S', S'')(T, S, S')$ γινόμενο πινάκων